Chapitre 13

ASSOCIATIVITE

Par opération ou fonction <u>finitaire</u> nous entendrons
toute fonction F définie en toute suite finie x
d'arguments appartenant à un domaine préassigné
généralement passé sous silence.
La valeur de la fonction F en la suite x sera notée (F x)

En particulier, la fonction finitaire F se trouve définie
en la suite vide et y prend la valeur notée (F)

Par opération ou fonction <u>associative</u> nous entendrons ici
les fonctions finitaires A qui vérifient
la formule d'<u>associativité</u>

(A xyz) = (A x(A y)z)

pour toutes les suites finies x y z
(d'arguments appartenant au domaine précité)

En cette formule
chacune des suites x y z peut être vide
(A y) note évidemment la valeur de A en y
xyz est l'évidente juxtaposée des suites x y z
x(A y)z est la tout aussi évidente juxtaposée
de la suite x, suivie de l'élément (A y), suivi de la suite z

Sont associatives :

L'addition et la multiplication des nombres réels

La réunion ensembliste

L'intersection des parties d'un ensemble E

La conjonction, la disjonction, l'addition de vérité

tandis que

L'exclusion et l'incompatibilité

sont finitaires et non associatives

Un argument u d'une fonction finitaire F est <u>neutre</u> pour F

si et seulement si

toutes suites finies d'arguments x z vérifient

(F xuz) = (F xz)

(où les suites x z peuvent évidemment être vides)

Vidant y dans la formule d'associativité,

toute fonction associative A vérifie

(A xz) = (A x(A y)z)

prouvant

la <u>neutralité</u> de (A) pour la fonction associative A .

Pour x et z vides

la formule d'associativité livre l'<u>idempotence</u>

(A y) = (A (A y))

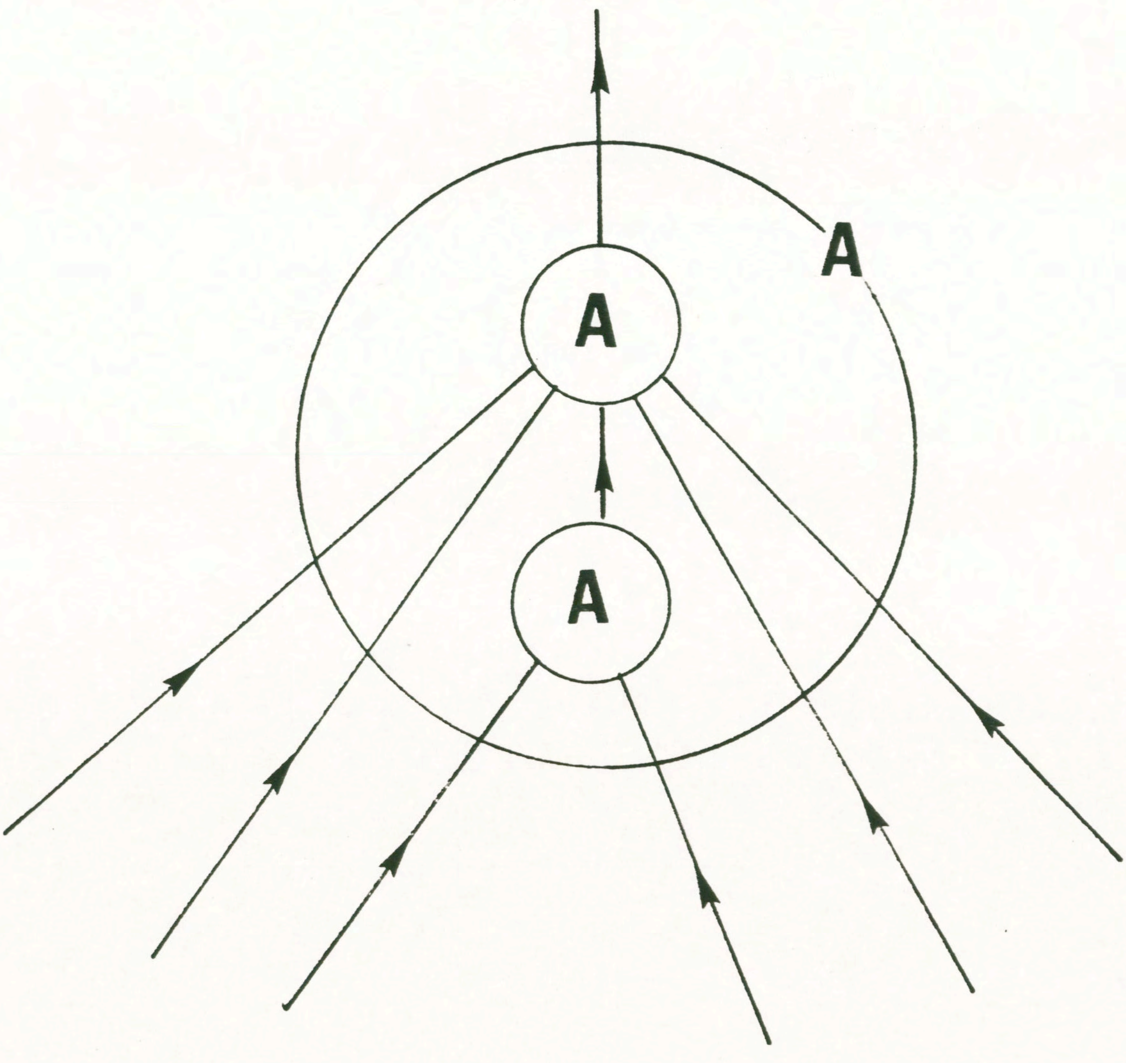
signfiant que toute fonction associative <u>fixe</u>

(A (A y)) = (A y)

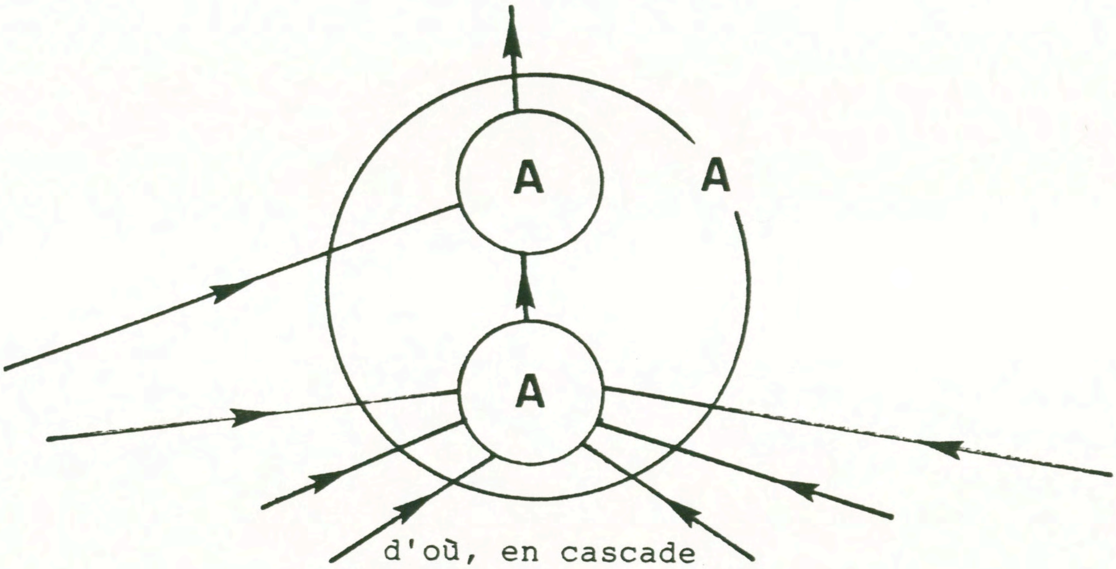
chacune des valeurs qu'elle prend

<u>Toute fonction associative A est idempotente de neutre (A)</u>

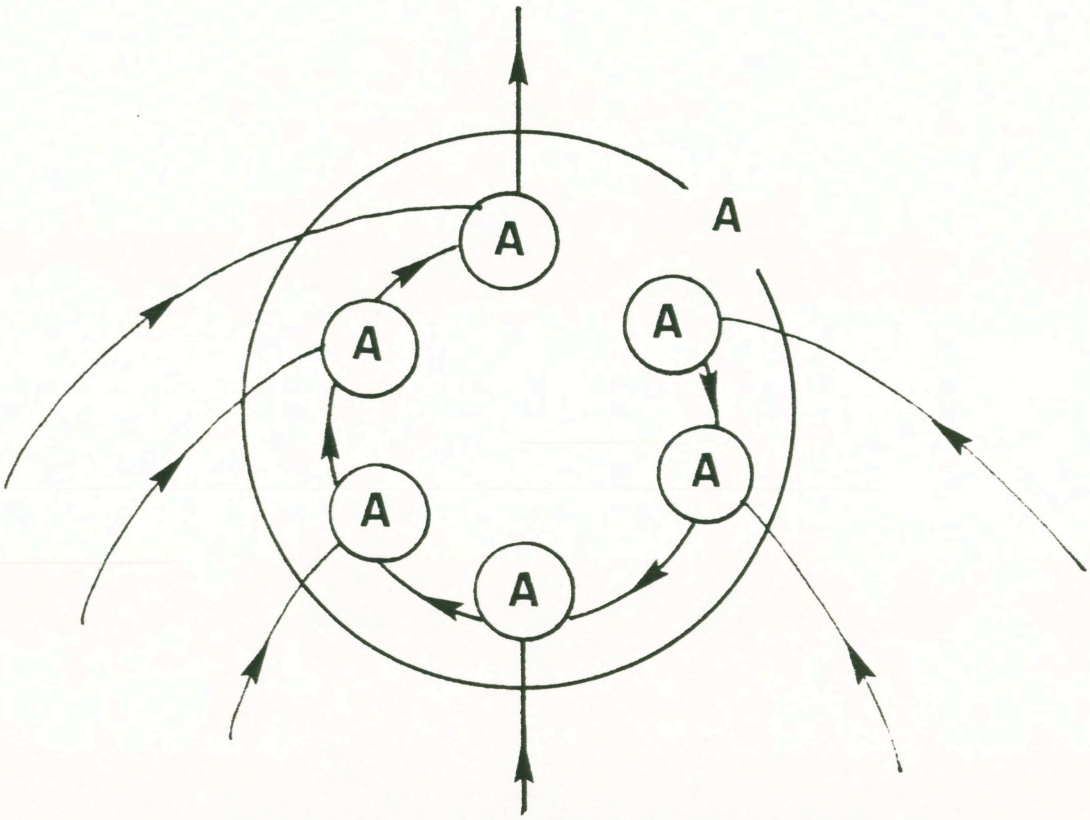
Toute fonction de vérité associative dessine



En particulier



d'où, en cascade



<u>Toute fonction de vérité associative</u>

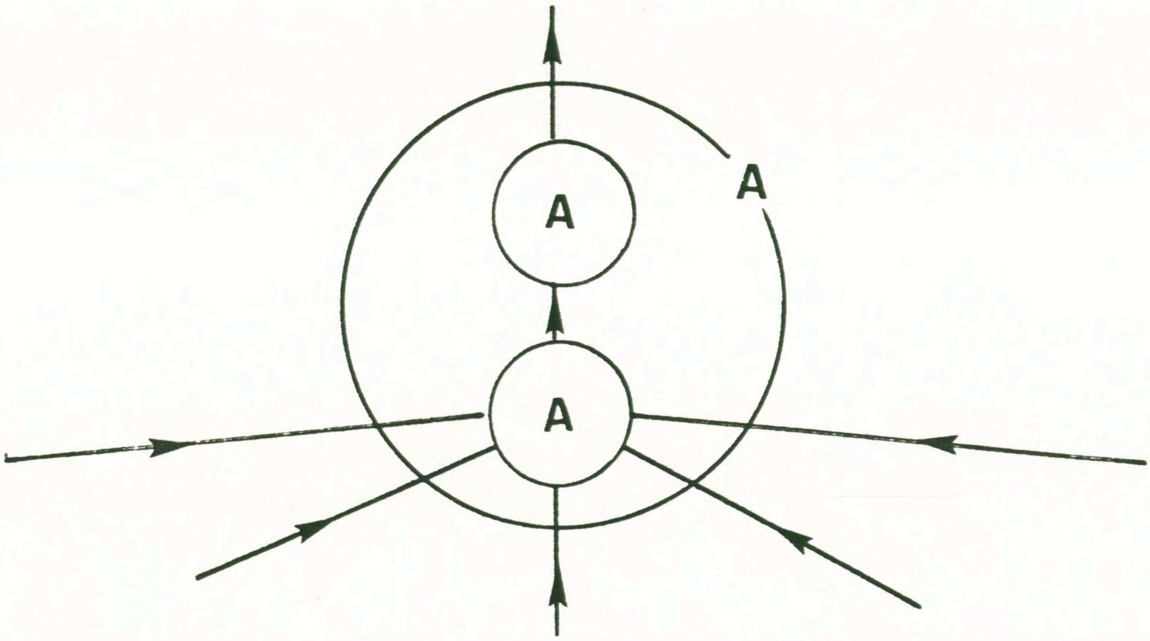
<u>restreinte à un nombre fini d'au amoins deux entrées</u>

<u>se calcule par une cascade</u>

<u>de restrictions de cette fonctions à deux entrées</u>

L'idempotence de la fonction de vérité associative A

se dessine



Les fonctions de vérité finitaires constantes <u>bleu</u> <u>rouge</u>

sont commutatives, associatives,

et admettent toutes deux les deux neutres <u>bleu</u> <u>rouge</u>

Inversement, toute fonction de vérité finitaire

qui admet les deux neutres <u>bleu</u> <u>rouge</u>

est constante,

puisque, fixant les idées, tout mot boolien tzyx

vérifie

(V tzyx) = (V zyx) = (V zy) = (V z) = (V)

Toute fonction de vérité associative non constante A

prend effectivement les deux valeurs de vérité <u>bleu</u> <u>rouge</u>

et fixe chacune d'elles

(A bleu) = bleu (A rouge) = rouge

:------------------------- Théorème 14 -------------------------:

Toute fonction de vérité qui admet deux neutres

est constante et associative

Toute fonction de vérité associative A

admet le neutre (A)

et fixe chacune des valeurs qu'elle prend

Toute fonction de vérité associative non constante

admet le seul neutre (A)

et fixe chacune des valeurs de vérité

(A o) = o et (A I) = I

:---: